كورس الأستاذ في الرياضيات

(الفرع الأدبي و الفندقي)

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

إعداد الأساتذة

طارق القيسي **يزن أبو عقاب**

فهرس المحتويات

الموضوع	رقم الصفحة
الوحدة الرابعة التكامل	
الدرس الأول التكامل الغير محدود	**5**
الدرس الثاني : الشرط الأولي	**16**
الدرس الثالث: التكامل المحدود	**27**

نقاط بيع التوجيهي

اسم المكتبة	العنوان	رقم الهاتف	اسم المكتبة	العنوان	رقم الهاتف	اسم المكتبة	العنوان	رقم الهاتف
الصفا	الرمثا	788887568	عالم الروائع	كفرنجة	799808263	الشعلة المضيئة	أبو عليا	778483801
الآفاق	الرمثا	785069693	الغربي	عنجرة	790146624	اللوتس	طبربور	799350333
ماريا	الرمثا	785255997	الحلم الجميل	جديتا	776946536	دار السلام	أبو نصير	795178536
الطرة	الطرة	788200279	السلطان	عجلون	798867402	أنوار طيبة	أبو نصير	797267997
غيث بوك	الحصن	785383963	الوسام الذهبي	عجلون	799954685	التاريخ	صويلح	795168900
الرشيد	الصريح	777397725	توجان	البقعة	797936366	الماسة	ماحص	776542201
عمار حرب	الحي الشرقي	788202106	عمورية	عين الباشا	795455355	اقرأ	البيادر	777775926
الصفا	ش . الهاشمي	788446624	المجدلاوي	السلط	776196939	الرائد العربي	وادي السير	796222185
عماد الدين	ش . القدس	877779625	معاذ	السلط	772061689	درة الأقصى	مخيم الحسين	796765997
يوسف	مجمع الأغوار	777717305	زيكو	الشونة الجنوبية	796808524	قص ولصق	مخيم الحسين	788307983
النسيم	اشارة النسيم	781095723	أشرف	الكرامة	787171730	المنفلوطي	الهاشمي	799614633
ايلاف	اشارة النسيم	788880140	بيروت	المعدي	789123456	يوسف	الهاشمي	796137028
العليمي	ش . حكما	799535666	سنجر	دير علا	780485520	حسان	النزهة	795226616
العربي	المفرق	798049224	بيروت	الكريمة	789123456	عدي	النزهة	798525208
الأقصى	المفرق	796461610	الوسام	الزرقاء الجديدة	791820880	زغد	نادي السباق	795852302
الأمل	بلعما	777198191	ميسم سنتر	الزرقاء الجديدة	788090683	نور عمان	ماركا	799369006
مكتبتي	جرش	798911694	العودة	الوسط التجاري	795122019	المسكاوي	ام النوارة	795014743
الاوائل	مخيم سوف	798035262	الوسام	الوسط التجاري	799467654	حي نزال	حي نزال	779344773
عمار حرب	الحي الشرقي	788202106	الوكالة العربية	الوسط التجاري	785713743	دار السلام	أبو نصير	795178536
الصفا	ش . الهاشمي	788446624	المها	الهاشمية	785191239	أنوار طيبة	أبو نصير	797267997
عماد الدين	ش . القدس	877779625	المجد	الرصيفة	786102855	التاريخ	صويلح	795168900
الشهد	مخيم غزة	785049248	صناع الحياة	الرصيفة	791432357	القيسي	الجوفة	788503497
الريان	سوف	772316804	حسن وأديب	الرصيفة	788223241	غيث	جبل التاج	780201730

اسم المكتبة	العنوان	رقم الهاتف	اسم المكتبة	العنوان	رقم الهاتف	اسم المكتبة	العنوان	رقم الهاتف
أبو طوق	الوحدات	787137827	التميز	مأدبا	788253032	ندى الورد	معان	779380352
الشقيقان	القويسمة	797032164	الحمد	مأدبا	788080815	الضياء	معان	776349143
فكرة وقلم	المستندة	788441599	الأنوار	مؤتة	799787292	التيسير	معان	796395115
البركة	أبو علندا	798950396	رام	مؤتة	792822063	العالمية	معان	799079063
مصطفى	أبو علندا	799886884	فارس حباشنة	الثنية	777757867	اقرأ	معان	772231522
الجهاد	سحاب	797915306	الإبداع	المنشية	788636162	اون لاين	الشوبك	770251904
العاب التميز	سحاب	787171563	الحرمين	القصر	795183879	البشير	وادي موسى	790884538
أبو بكر	خريبة السوق	788262037	حمزة	البصيرة	772151614	الرسالة	العقبة	032015799
كنز	جبل الزهور	787033372	آل البيت	الطفيلة	778685808	السادسة	العقبة	788471911
السعدي	اليادودة	779864133	الفيروز	العيص	776261196			
راضي	مأدبا	772470892	القدس	العيص	775110112			

الوحدة الرابعة

التكامل

الدرس الأول

التكامل غير المحدود

يرمز للتكامل بالرمز ($\int$) وعكس التفاضل حيث

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, bend left, "\frac{dy}{dx}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\int f'(x)\ .\ dx"] \end{tikzcd}$$

بمعنى آخر فإن

$$f(x) = \int f'(x)\ .\ dx$$

حيث :

$f(x)$ = الاقتران الأصلي

$\int$ = رمز التكامل

$f'(x) = f$ مشتقة الاقتران

$d\,x$ = متغير التكامل

وللتكامل نوعان

أولاً: التكامل الغير المحدود:

$$f(x) = \int f'(x)\ .\ dx$$

ثانياً: التكامل المحدود:

$$f(x) = \int_a^b f'(x)\ .\ dx$$

وأما عن قواعد التكامل فهي:

القاعدة الأولى

$$(1)\ \int k\ .\ dx = k\,x + c$$

حيث c, k أعداد ثابتة

فمثلاً:

❖ $\int \underset{\substack{\downarrow \\ \text{عدد ثابت}}}{3}\ .\ dx = 3\,x + c$

❖ $\int 2\ .\ dx = 2\,x + c$

❖ $\int \frac{-5}{3}\ .\ dx = \frac{-5}{3}\ x + c$

❖ $\int \sqrt{3}\ .\ dx = \sqrt{3}\ x + c$

❖ $\int \frac{-1}{\sqrt{5}}\ .\ dx = \frac{-1}{\sqrt{5}}\ x + c$

القاعدة الثانية

$$(2)\ \int x^n\ .\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال:

$$\int x^3 \, . dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c$$

أي تضاف للقوة دائماً على x واحد ثم نقسم

على نفس القوة

- ❖ $\int x^2 \, . dx = \frac{x^3}{3} + c$

- ❖ $\int x^5 \, . dx = \frac{x^6}{6} + c$

- ❖ $\int x \, . dx = \frac{x^2}{2} + c$

- ❖ $\int x^8 \, . dx = \frac{x^9}{9} + c$

- ❖ $\int x^4 \, . dx = \frac{x^5}{5} + c$

- ❖ $\int x^{-3} \, . dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c$

وبما أن القوة سالبة يكتب الاقتران

على الشكل التالي:

$$= \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{1}{-2x^2} + c$$ يرفع السالب للبسط

$$= \frac{-1}{2x^2} + c$$

- ❖ $\int x^{-6} \, . dx = \frac{x^{-5}}{-5} + c$

$$= \frac{1}{-5x^5} + c = \frac{-1}{5x^5} + c$$

- ❖ $\int x^{-2} \, . dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$

$$= \frac{1}{-x} + c$$

$$= \frac{-1}{x} + c$$

- ❖ $\int x^{\frac{1}{2}} \, . dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

بتوحيد المقامات تصبح

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

وأيضاً يمكن اعادة كتابة الاقتران

حتى يعود الى الشكل الأصلي وهو

الجذر

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

ويمكن أيضاً اختصار العملية

بطريقة مختلفة عن السابق وهي :

$$= \int x^{\frac{1}{2}} \, . dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

- ❖ $\int x^{\frac{2}{3}} \, . dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$$

❖ $\int x^{\frac{-1}{7}} . dx = \frac{-7}{5} x^{\frac{6}{7}} + c$

$= \frac{7}{6}\sqrt[7]{x^{6}} + c$

القاعدة الثالثة

عند وجود عدد ثابت مثل k مضروب في الاقتران f(x) داخل التكامل

(3) $\int k\, f(x) . dx = k \int f(x) . dx$

↓

يمكن استخراجه خارج التكامل ← ثابت

❖ $\int 5x^2 . dx = 5\int x^2 . dx$

$= \frac{5x^3}{3} + c$

❖ $\int 3x^4 . dx = 3\frac{3x^5}{5} + c$

❖ $\int 4x . dx = \frac{4x^2}{2} + c$

$= 2x^2 + c$

❖ $\int 5\sqrt{x} . dx =$

الحل: يكتب الجذر على الصورة الأسية

$\int 5x^{\frac{1}{2}} . dx = (\frac{2}{3})x^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$

❖ $\int 4\sqrt[5]{x^2} . dx =$

$\int 4x^{\frac{2}{5}} . dx = (\frac{5}{7})4x^{\frac{7}{5}} + c$

$= \frac{20}{7}\sqrt[5]{x^7} + c$

❖ $\int 3\sqrt[7]{x^{-3}} . dx =$

$\int 3x^{\frac{-3}{7}} . dx = (\frac{7}{4})3x^{\frac{4}{7}} + c$

$= \frac{21}{4}\sqrt[7]{x^4} + c$

القاعدة الرابعة

(4) $\int f(x) \pm g(x) . dx =$

$\int f(x) . dx \pm \int g(x) . dx$

ملاحظة:

↲ يقصد من القاعدة ← عند وجود الجمع والطرح يمكن اجراء عملية التكامل على حسب القواعد السابقة.

↲ أما الضرب والقسمة فلا يمكن ذلك إلا بعد معالجة الضرب أو القسمة والأمثلة التالية توضح ذلك.

سؤال: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(1) $\int 3x^2 + 5x + 4 \, . \, dx$

الحل: بما أن العملية هي الجمع فقط بين الحدود
يمكن اجراء التكامل بصورة مباشرة.

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 4x + c$$

$$= x^3 + \frac{5x^2}{2} + 4x + c$$

(2) $\int 2x^3 - 4x + 5 \, . \, dx$

$$= \frac{2x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + 5x + c$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x^2 + 5x + c$$

(3) $\int 3x^7 - x^5 + 3 \, . \, dx$

$$= \frac{3x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + 3x + c$$

(4) $\int 2 - 5x^2 \, . \, dx$

$$= 2x - \frac{5x^3}{3} + c$$

(5) $\int 5x^2 + \sqrt[5]{x} + 2 \, . \, dx$

الحل: قبل التكامل نعيد كتابة السؤال بحيث
يكتب الجذر على الصورة الأسية

$$\int 5x^2 + x^{\frac{1}{5}} + 2 \, . \, dx$$

الحل:

$$= \frac{5x^3}{3} + \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}} + 2x + c$$

$$= \frac{5x^3}{3} - \frac{5}{6} \sqrt[5]{x^6} + 2x + c$$

(6) $\int 3x^3 + 5x^2 - 4 \, . \, dx$

$$= \frac{3x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 4x + c$$

(7) $\int 2 - 3x^2 - x^5 \, . \, dx$

$$= 2x - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^6}{6} + c$$

(8) $\int \frac{3x}{5} + 2 \, . \, dx$

نفصل معامل x ونعيد كتابة السؤال

$$\int \frac{3x}{5} + 2 \, . \, dx = \frac{3}{5} \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

$$= \frac{3x^2}{10} + 2x + c$$

(9) $\int \frac{2x^2}{3} + \frac{5x}{2} - 4 \, . \, dx$

$$= \int \frac{2}{3} x^2 + \frac{5}{2} x - 4 \, . \, dx$$

$$= \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2} \frac{x^2}{2} - 4 + c$$

$$= \frac{2x^3}{9} + \frac{5x^2}{4} - 4 + c$$

(10) $\int 5 - \frac{3x^2}{2} \, . \, dx$

$$= \int 5 - \frac{3}{2}x^2 \ . dx$$

$$= 5x - \frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + c$$

$$= 5x - \frac{\cancel{3}^{1} x^3}{\cancel{6}_{2}} + c$$

$$= 5x - \frac{x^3}{2} + c$$

(11) $\int 5x^2 + 3\sqrt{x} \ . dx$

نعيد كتابة السؤال بحيث يكتب الجذر على

الصورة الأسية

$$= \int 5x^2 + 3x^{\frac{1}{2}} \ . dx$$

$$= \frac{5x^3}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)\left(3x^{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{5x^3}{3} + \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{3}_{1}} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{5x^3}{3} + 2x^{\frac{3}{2}} + c$$

(12) $\int 3\sqrt[5]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} \ . dx$

$$= \int 3x^{\frac{2}{5}} + 4x^{\frac{1}{3}} \ . dx$$

$$= \left(\frac{5}{7}\right)\left(3x^{\frac{7}{5}}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(4x^{\frac{4}{3}}\right) + c$$

$$= \frac{15}{7}x^{\frac{7}{5}} + \frac{12}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{15}{7}x^{\frac{7}{5}} + 3x^{\frac{4}{3}} + c$$

(12) $\int 3\sqrt[5]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} \ . dx$

(13) $\int 3x^2(5x + 3) \ . dx$

الحل: هنا يمكن اجراء عملية التكامل لوجود الضرب لذلك نجري عملية الضرب مع بقاء اشارة التكامل ثم نكامل .

$$= \int 15x^3 + 9x^2 . dx$$

الآن نكامل

$$= \frac{15x^4}{4} + \frac{9x^3}{3} + c$$

$$= \frac{15x^4}{4} + 3x^3 + c$$

(14) $\int (2x + 3)(5x + 2) \ . dx$

الحل: أيضاً نجري عملية الضرب ثم نكامل

$$= \int 10x^2 + 4x + 15x + 6 . dx$$

تجميع للحدود المتشابهة

$$= \int 10x^2 + 19x + 6 . dx$$

نكامل

$$= \frac{10x^3}{3} + \frac{19x^2}{2} + 6x + c$$

(15) $\int (3x^2 - 4)(4x^2 + 3) \ . dx$

الحل: نضرب

$$= \int 12x^4 + 9x^2 - 16x^2 - 12 . dx$$

تجميع للحدود المتشابهة

$$= \int 12x^4 - 7x^2 - 12 . dx$$

نكامل

$$= \frac{12x^5}{5} - \frac{7x^3}{3} - 12x + c$$

(16) $\int (3 - 4x^2)(4x + 5) \ . dx$

الحل:

$$= \int 12x + 15 - 16x^3 - 20x^2 \; . dx$$

$$= \frac{12x^2}{2} + 15x - \frac{16x^4}{4} - \frac{20x^3}{3} + c$$

$$= 6x^2 + 15x - 4x^4 - \frac{20x^3}{3} + c$$

(17) $\int (5x+3)^2 \; . dx$

الحل:

$$\int (5x+3)^2 \; . dx =$$

$$\int (5x+3)(5x+3) \; . dx =$$

$$\int 25x^2 + 15x + 15x + 9 \; . dx =$$

$$\int 25x^2 + 30x + 9 \; . dx =$$

$$\frac{25x^3}{3} + \frac{30x^2}{2} + 9x + c =$$

$$\frac{25x^3}{3} + 15x^2 + 9x + c$$

(18) $\int (2x-4)^2 \; . dx$

الحل:

$$\int (2x-4)(2x-4) \; . dx =$$

$$\int 4x^2 - 8x - 8x + 16 \; . dx =$$

$$\int 4x^2 - 16x + 16 \; . dx =$$

$$\frac{4x^3}{3} - \frac{16x^2}{2} + 16x + c =$$

$$\frac{4x^3}{3} - 8x^2 + 16x + c$$

(19) $\int \frac{5x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{x^5} \; . dx$

تنبيه

عند وجود حد وحيد في المقام نوزع البسط على المقام ونعيد كتابة السؤال مستخدماً قوانين الأسس

$$= \int \frac{5x^3}{x^5} + \frac{2x^2}{x^5} - \frac{4x}{x^5} + \frac{2}{x^5} \; . dx$$

الأسس في القسمة تطرح

$$= \int 5x^{3-5} + 2x^{2-5} - 4x^{1-5} + 2x^{-5} \; . dx$$

$$= \int 5x^{-2} + 2x^{-3} - 4x^{-4} + 2x^{-5} \; . dx$$

$$= \frac{5x^{-1}}{-1} + \frac{2x^{-2}}{-2} - \frac{4x^{-3}}{-3} + \frac{2x^{-4}}{-4} + c$$

نعدل الشكل حتى تصبح القوة موجبة

$$= \frac{5}{-x} + \frac{2}{-2x^2} - \frac{4}{-3x^3} + \frac{2}{-4x^4} + c$$

ثم يرفع السالب من المقام

$$= \frac{-5}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3x^3} - \frac{2}{4x^4} + c$$

(20) $\int \frac{3x^5 + 4}{x^3} \; . dx$

$$= \int \frac{3x^5}{x^3} + \frac{4}{x^3} \; . dx$$

$$= \int 3x^2 + 4x^{-3} \; .dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^{-2}}{-2} + c$$

$$= x^3 - \frac{2}{x^2} + c$$

(21) $\int x\sqrt{x} \; . dx$

الحل: يكتب الجذر على صورة أسية

$$= \int x \ . \ x^{\frac{1}{2}} \ . \ dx$$

$$= \int x^{1} \ . \ x^{\frac{1}{2}} \ . \ dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} \ . \ dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}} \ . \ dx$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^{5}} + c$$

$$(22) \quad \int \frac{x^{2}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \ . \ dx$$

الحل: يكتب الجذر على صورة أسية

$$= \int \frac{x^{2} \ . \ x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} \ . \ dx$$

نطبق قوانيني الأسس في الضرب تجمع الأسس

وفي القسمة تطرح

$$= \int \frac{x^{2+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} \ . \ dx$$

نوحد المقامات

$$= \int \frac{x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} \ . \ dx$$

$$= \int \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} \ . \ dx$$

نوحد المقامات

$$= \int x^{\frac{5}{2}-\frac{1}{3}} \ . \ dx$$

$$= \int x^{\frac{15}{6}-\frac{2}{6}} \ . \ dx$$

$$= \int x^{\frac{13}{6}} \ . \ dx$$

$$= \frac{6}{19} x^{\frac{19}{6}} + c$$

$$= \frac{6}{19}\sqrt[6]{x^{19}} + c$$

$$(23) \quad \int \frac{1}{x^{5}} \ . \ dx$$

لا يوجد تكامل للقسمة لذلك :

نجعل x في البسط مع تغير إشارة القوة

$$\int \frac{1}{x^{5}} \ . \ dx = \int x^{-5} \ . \ dx$$

$$= \frac{x^{-4}}{-4} + c$$

$$= \frac{-1}{4x^{4}} + c$$

$$(24) \quad \int 3x^{2}(2x^{2} - \frac{5}{x^{2}}) \ . \ dx$$

الحل: نوزع على الأقواس

$$= \int 3x^{2}(2x^{2} - \frac{5}{x^{2}}) \ . \ dx$$

$$= \int 6x^{4} - \frac{15x^{2}}{x^{2}} \ . \ dx$$

$$= \int 6x^{4} - 15 \ . \ dx$$

$$= \frac{6x^{5}}{5} - 15x + c$$

$$(25)\quad \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right) . \, dx$$

الحل: يكتب الجذر على صورة أسية

$$= \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^5} \; . \, dx$$

يجب عدم وجود x في المقام

$$= \int x^{\frac{-1}{2}} - 3x^{-5} \; . \, dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{3x^{-4}}{-4} + c$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{3}{4x^4} + c$$

أتحقق من فهمي ص 12:

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$(a)\quad \int (x^3 - 2x^{\frac{5}{3}}) . \, dx$$

الحل:

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{8}(2x^{\frac{8}{3}}) + c$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6}{8}\sqrt[3]{x^8} + c$$

$$(b)\quad \int 3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}} \; . \, dx$$

$$= \int 3x^2 - \frac{6}{x^{\frac{1}{5}}} \; . \, dx$$

$$= \int 3x^2 - 6x^{\frac{-1}{5}} \; . \, dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} - \frac{4}{5}(6x^{\frac{4}{5}}) + c$$

$$= x^3 - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^4} + c$$

تمارين ومسائل ص 14 :

أجد اقترانا ً أصليا ً لكل من الاقترانات الآتية:

(1) $f(x) = x^7$

الحل: نكامل الاقتران لنجد الاقتران الأصلي لَهُ .

$$f(x) = \int f(x)\,.\,dx$$

$$f(x) = \int x^7\,.\,dx$$

$$f(x) = \frac{x^8}{8} + c$$

(2) $f(x) = -2x^6$

$$f(x) = \int -2x^6\,.\,dx$$

$$= \frac{-2x^7}{7} + c$$

(3) $f(x) = -10$

$$f(x) = \int -10\,.\,dx$$

$$= -10x + c$$

(4) $f(x) = 8x$

$$f(x) = \int 8x\,.\,dx$$

$$= \frac{8x^2}{2} + c$$

$$= 4x^2 + c$$

أجد كلا ً من التكاملات الآتية:

(5) $\int 6x\,.\,dx$

$$= \frac{6x^2}{2} + c$$

$$= 3x^2 + c$$

(6) $\int 7x - 5\,.\,dx$

$$= \frac{7x^2}{2} - 5x + c$$

(7) $\int 3 - 4x\,.\,dx$

$$= 3x - 2x^2 + c$$

(8) $\int \frac{10}{\sqrt{x}}\,.\,dx = \int 10x^{\frac{-1}{2}}.dx$

$$= (2)(10)x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 20\sqrt{x} + c$$

(9) $\int 2x^{\frac{3}{2}}\,.\,dx$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)2x^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + c$$

(10) $\int 2x^4 - 5x + 10\,.\,dx$

$$= \frac{2x^5}{5} - \frac{5x^2}{2} + 10x + c$$

(10) $\int 2x^4 - 5x + 10\,.\,dx$

$$= \frac{2x^5}{5} - \frac{5x^2}{2} + 10x + c$$

(11) $\int 2x^3 - 2x\,.\,dx$

$$= \frac{2x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + c$$

(12) $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3}\,.\,dx$

الحل:

$$= \int \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}} - x^{\frac{3}{2}} \, . \, dx$$

$$= \int 3x^{\frac{-1}{3}} - x^{\frac{3}{2}} \, . \, dx$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)3x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$$

(13) $\int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \, . \, dx$

$$= \int x^{-2} - x^{-3} . dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$$

(14) $\int \frac{4x^3 - 2}{x^3} \, . \, dx$

$$= \int \frac{4x^3}{x^3} - \frac{2}{x^3} . dx$$

$$= \int 4 - \frac{2}{x^3} . dx$$

$$= 4x - \frac{2x^{-2}}{-2} + c$$

$$= 4x + \frac{1}{x^2} + c$$

(15) $\int \frac{2x + 8}{\sqrt{x}} \, . \, dx$

$$= \int \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{8}{\sqrt{x}} . dx$$

$$= \int 2x^{1 - \frac{1}{2}} + \frac{8}{x^{\frac{1}{2}}} . dx$$

$$= \int 2x^{\frac{1}{2}} + 8x^{\frac{-1}{2}} . dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)2x^{\frac{3}{2}} + (2)\, 8x^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 16\sqrt{x} + c$$

(16) $\int (x-1)^2 \, . \, dx$

$$= \int (x-1)\,(x-1) \, . \, dx$$

$$= \int x^2 - x - x + 1 \, . \, dx$$

$$= \int x^2 - 2x + 1 \, . \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + c$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + x + c$$

(17) $\int \frac{x^3 + 8}{x+2} \, . \, dx$

الحل: نحلل لوجود حدين في المقام

$$\int \frac{\cancel{(x+2)}(x^2 - 2x + 4)}{\cancel{x+2}} \, . \, dx$$

$$= \int x^2 - 2x + 4 \, . \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + c$$

(18) $\int \sqrt{x}\,(x-1) \, . \, dx$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}(x-1) \, . \, dx$$

$= \int x^{\frac{1}{2}+1} - x^{\frac{1}{2}} \, . \, dx$ نوحد المقامات

$$= \int x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \ . \ dx$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

(19) $\int (2x-3)(3x-1) \ . \ dx$

$$= \int 6x^2 - 2x - 9x + 3 \ . \ dx$$

$$= \int 6x^2 - 11x + 3 \ . \ dx$$

$$= \frac{6x^3}{3} - \frac{11x^2}{2} + 3x + c$$

$$= 2x^3 - \frac{11x^2}{2} + 3x + c$$

مهارات التفكير العليا

تحد: أجد كل تكامل مما يأتي:

(21) $\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 \ . \ dx$

$$\int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \ . \ dx$$

$$= \int \left(1 + x^{-2}\right)^2 . \ dx$$

$$= \int \left(1 + x^{-2}\right)\left(1 + x^{-2}\right). \ dx$$

$$= \int 1 + x^{-2} + x^{-2} + x^{-4} . dx$$

$$= \int 1 + 2x^{-2} + x^{-4} . dx$$

$$= x + \frac{2x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + c$$

$$= x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + c$$

(22) $\int (x-1)(x-3)(x+5) \ . \ dx$

الحل:

$$= \int (x^2 - 3x - x + 3)(x+5) \ . \ dx$$

$$= \int (x^2 - 4x + 3)(x+5) \ . \ dx$$

$$= \int x^3 + 5x^2 - 4x^2 - 20x + 3x + 15 \ . \ dx$$

$$= \int x^3 + x^2 - 17x + 15 \ . \ dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{17x^2}{2} + 15x + c$$

(22) $\int \frac{p}{2x^2} x^{-2} + Q \ . \ dx = \frac{2}{x} + 10x + c$

نكامل الطرف الأول

$$\frac{P}{2} x^{-2} + Q \ . \ dx =$$

$$\frac{P}{2} \frac{x^{-1}}{-1} + Qx + c =$$

$$\frac{-P}{2x} + Q\,x + c$$

ثم نجري مقارنة

$$\frac{-P}{2x} + Q + c$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{2}{x} + 10x + c$$

بالقسمة على x

$$\rightarrow \frac{Qx}{x} = \frac{10x}{10}$$

$$Q = 10$$

بالضرب التبادلي $\frac{-p}{2x} = \frac{2}{x}$

بالقسمة على (-x) $-p\,x = 4x$

$$\frac{-px}{-x} = \frac{4x}{-x}$$

$$p = -4$$

الدرس الثاني
الشرط الأولي

الشرط الأولي : وهو ايجاد الاقتران الأصلي مع تحديد قيمة الثابت C في التكامل؛ لذلك سوف نقوم بحل مجموعة من الأسئلة لايجاد الاقتران الأصلي مع تحديد قيمة الثابت C مع بيان الخطوات

سؤال1: أجد قاعدة الاقتران f(x) ، إذا كانت $f'(x) = 2x + 3$ ويمر منحناه بالنقطة (0,3) ؟؟

الحل:

أولاً: نكتب القاعدة للتكامل

$f(x) = \int f'(x) \, .dx$

$f(x) = \int 2x + 3 \, .dx$

ثانياً: نجد التكامل:

$f(x) = \frac{2x^2}{2} + 3x + c$

$f(x) = x^2 + 3x + c$

ثالثاً: نستخدم النقطة المعطاة في السؤال وهي

(0 , 3)

(x)   f(x)

$f(x) = x^2 + 3x + c$

$3 = (0)^2 + 3(0) + c$

$3 = c$

رابعاً: نعيد كتابة قاعدة الاقتران

$f(x) = x^2 + 3x + 3$

سؤال 2: إذا كانت $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ أجد قاعدة الاقتران f(x) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (1,4) ؟؟

الحل:

$f(x) = \int f'(x) \, .dx$

$f(x) = \int 3x^2 - 4x + 5 \, .dx$

$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x + c$

$f(x) = x^3 – 2x^2 + 5x + c$

الآن نستخدم النقطة المعطاة في السؤال وهي

(1 , 4)

f(x)   (x) ونعوض

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + c$

$4 = (1)^3 + 2(1)^2 + 5(1) + c$

$4 = -1 + 5 + c$

$4 = 4 + c$

$-4 \quad -4$

$c = 0$

نعيد كتابة قاعدة الاقتران f(x) ونستبدل قيمة c = 0

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 0$

سؤال 3 : إذا كان

$f'(x) = (x – 3)(x + 1)$

أجد قاعدة الاقتران f(x) علماً بأن f(-2) = 7 ؟؟

الحل:

$f(x) = \int f'(x) \, .dx$

$f(x) = \int (x - 3)(x + 1) \, .dx$

نضرب الأقواس

$f(x) = \int x^2 + x - 3x - 3 \, .dx$

نجمع الحدود

$f(x) = \int x^2 - 2x - 3 \, .dx$

الآن نجري عملية التكامل

$$f(x)= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 3x + c$$

$$f(x)= \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + c$$

نستخدم الآن $f(-2) = 7$

حيث:

$x = -2$

$f = 7$

$$7 = \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 - 3(-2) + c$$

$$7 = \frac{-8}{3} - 4 + 6 + c$$

نوحد المقامات

$$7 = \frac{-8}{3} + \frac{3.2}{3.1} + c$$

$$7 = \frac{-8}{3} + \frac{6}{3} + c$$

$$7 = \frac{\cancel{-2}}{\cancel{3}} + c$$

$$\frac{+2}{3} \qquad \frac{\cancel{+2}}{\cancel{3}}$$

نوحد المقامات

$$c = \frac{3.7}{3.1} + \frac{2}{3}$$

$$c = \frac{21}{3} + \frac{2}{3}$$

$$c = \frac{23}{3}$$

نعيد كتابة $f(x)$

$$f(x)= \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + \frac{23}{3}$$

أتحقق من فهمي ص 16 :

$$f(x) = \int f'(x) \, . \, dx$$

$$f(x) = \int 6x^2 + 5 \; . \, dx$$

$$f(x) = \frac{\cancel{6}^{2} x^3}{\cancel{3}} + 5x + c$$

$(1 , 9)$

(x) $\quad$ $f(x)$

$9 = 2(1)^3 + 5(1) + c$

$9 = 2 + 5 + c$

$9 = 7 + c$

$-7 \quad -7$

$2 = c$

$f(x) = 2x^3 + 5x + 2$

سؤال: (من الحياة):

التكلفة الحدية: يمثل الاقتران

$c'(x) = 3x^2 – 60x + 400$

التكلفة الحدية (بالدينار) لكل طابعة ملونة تنتجها إحدى الشركات حيث x عدد الطابعات المنتجة و c (x) تكلفة انتاج x طابعة بالدينار أجد اقتران التكلفة c(x) علماً بأن تكلفة انتاج طابعة واحدة هي 583 JD ؟؟

الحل:

$$C(x) = \int c'(x) \, . \, dx$$

$$C(x) = \int 3x^2 - 60 + 400 \, .dx$$

نكامل الاقتران

$$C(x)= \frac{3x^3}{3} - \frac{60x^2}{2} + 400x + c$$

$$C(x)=x^3 - 30x^2 + 400x + c$$

من المعطيات في السؤال فإن :

$$C(1) = 583$$

(x) $\quad\quad$ C(x)

$583 = (1)^3 - 30(1)^2 + 400\,(1) + c$

$583 = 1 - 30 + 400 + c$

$583 = 371 + c$

$-371 \quad -371$

$c = 212$

نعيد كتابة اقتران التكلفة

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 212$$

أتحقق من فهمي ص 17:

يمثل الاقتران $(C'(x) = 0.3x^2 + 2x)$ التكلفة الحدية (بالدينار) لكل قطعة تنتج في إحدى الشركات حيث x قطعة بالدينار
أجد اقتران التكلفة C(x) علماً بأن تكلفة (10) قطع هي 2200 JD ؟؟

الحل:

$$C(x) = \int C'(x)\,.\,dx$$

$$C(x) = \int 0.3x^2 + 2x\,.\,dx$$

$$C(x) = \frac{0.3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + c$$

$$C(x) = \frac{0.3x^3}{3} + x^2 + c$$

من المعطيات في السؤال فإن تكلفة (10) قطع هي 2200
إذن

$x = 10$

$C(10) = 2200$

نعوض في دالة التكلفة

$$2200 = \frac{0.3(10)^3}{3} + (10)^2 + c$$

$$2200 = \frac{0.3(1000)}{3} + (100) + c$$

$$2200 = \frac{300}{3} + (100) + c$$

$$2200 = 100 + 100 + c$$

$$2200 = 200 + c$$

$-200 \quad -200$

$2000 = c$

نعيد كتابة التكلفة

$$C(x) = \frac{0.3x^3}{3} + x^2 + 2000$$

تذكير

المسافة (الموقع) = S(t)
السرعة المتجهة = V(t) = S (t)
التسارع = a(t) = V(t)

قواعد:

- $S(t) = \int V(t)\,.\,dx$
- $r(t) = \int a(t)\,.\,dx$

سؤال 1: يتحرك جسيم على خط مستقيم، بسرعة متجهة تعطى بالعلاقة

$V(t) = 2t + 7$

حيث V = السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية
t = الزمن بالثانية
فجد موقع الجسيم علماً بأن موقعه الابتدائي 12m= ، ثم جد موقعه بعد 3 ثواني .
الحل:

أولاً: نكتب القاعدة

$$S(t) = \int V(t)\,.\,dx$$

$$S(t)=\int 2t + 7\ .dt$$

$$S(t) = \frac{2t^2}{2} + 7t + c$$

$$S(t)=t^2 + 7t + c$$

من المعطيات فإن موقعه الابتدائي

$= 12$ m

تذكير

ابتدائي تعني $t = 0$

$$C(0) = 12$$

$t=(0)$ $S=12$

$$12 = (0)^2 + 7\,(0) + c$$

$$12 = c$$

نكتب قاعدة الموقع

$$S(t) = t^2 + 7\,t + 12$$

الآن نجد موقع الجسم بعد 3 ثواني

$t = 3$

$$S(3) = (3)^2 + 7\,(3) + 12$$

$$= 9 + 21 + 12$$

$$= 42 \text{ m}$$

سؤال 2 : يتحرك جسيم في مسار مستقيم بتسارع يعطى بالعلاقة

$$a(t) = 3t^2 + 6t + 5$$

حيث a = التسارع بالمتر تربيع لكل ثانية

t = الزمن بالثانية

فجد السرعة المتجهة بعد 2 ثانية علماً بأن سرعته بعد 1 ثانية = 15 m/s

الحل: المطلوب ايجاد V(t)

$$V(t) = \int a(t)\,.\,dx$$

$$V(t)=\int 3t^2 + 6t + 5\ .dt$$

$$V(t) = \frac{3t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} + 5t + c$$

$$V(t)=t^3 + 3t^2 + 5t + c$$

من المعطيات فإن سرعته بعد 1 ثانية =15

$$V(1) = 15$$

$t=(1)$ V

$$15 = (1)^3 + 3\,(1)^2\ 5\,(1) + c$$

$$15 = 1 + 3 + 5 + c$$

$$15 = 9 + c$$

$-9 \quad -9$

$$c = 6$$

نكتب قاعدة السرعة المتجهة

$$v(t) = t^3 + 3t^2 + 5t + 6$$

الآن نعوض $t = 2$

$$V(2) = (2)^3 + 3(2)^2 + 5(5) + 6$$

$$= 8 + 12 + 10 + 6$$

$$= 20 + 10 + 6$$

$$= 30 + 6$$

$$= 36 \text{ m/s}$$

أتحقق من فهمي صفحة 18 :

$$r(t) = 36t - 3t^2$$

$$S(t) = \int r(t)\ \ .\,dt$$

$$= \frac{36t^2}{2} - \frac{3t^3}{3} + c$$

$$S(t) = 18t^2 - t^3 + c$$

بما أن الجسم بدأ يتحرك من نقطة الأصل :

$$(\,0\ ,\ 0\,)$$

t S

$0 = 18(0)^2 - (0)^3 + c$

$\boxed{0 = c}$

$S(t) = 18t^2 - t^3$

المطلوب: الموقع بعد 3 ثواني

$S(t) = 18(3)^2 - (3)^3$

$= 18(9) - 27$

$= 162 - 27 = 135\ m$

سؤال: يتحرك جسيم على مسار مستقيم بحيث يعطي تسارعه بالقاعدة:

$a(t) = 12\ m/s^2$

حسب موقع الجسيم بعد 2 ثانية علماً بأن سرعته الابتدائية $v(0) = 8\ m/s^2$

وموقعه الابتدائي $S(0) = 5\ m$

الحل: المعطى ←

$a(t) = 12 \quad S(0) = 5 \quad v(0) = 8$

نجد أولاً السرعة:

$V(t) = \int a(t)\,.dt$

$V(t) = \int 12\,.dt$

$V(t) = 12t + c$

من المعطيات: $r(0) = 8$

t   V

$8 = 12(0) + c$

$8 = c$

نكتب قاعدة $v(t)$

$V(t) = 12t + 8$

الآن نجد $S(t)$ ←

$S(t) = \int V(t)\,.dt$

$S(t) = \int 12t + 8\,.dt$

$S(t) = \frac{12t^2}{2} + 8\ dt$

$S(t) = 6t^2 + 8t + c$

من المعطيات: $S(0) = 5$

t   S

$5 = 6(0)^2\ \ 8(0) + c$

$5 = c$

$S(t) = 6t^2 + 8t + 5$

الآن المطلوب:

$S(2) = 6(2)^2 + 8(2) + 5$

$= 6(4) + 16 + 5$

$= 24 + 16 + 5$

$= 45\ m$.

أتحقق من فهمي صفحة 20:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم ويعطى تسارعه بالاقتران

$a(t) = 4t - 4$

حيث t الزمن بالثواني و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع إذا بدأ الجسم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 5 m/s فأجد موقعه بعد 3 ثوان من بدء الحركة.

الحل: المعطيات: $a(t) = 4t - 4$

الحركة من نقطة الأصل بسرعة = 5 m/s

$$\begin{cases} V(0) = 5 \\ S(0) = 0 \end{cases}$$

المطلوب: $S(3)$

أولاً نجد السرعة المتجهة.

$v(t)=\int a(t)\,.dt$

$v(t)=\int 4t - 4\,.dt$

$$v(t)=\frac{4t^2}{2}-4t+c$$

$$v(t)=2t^2-4t+c$$

ثانياً من المعطى السرعة بحيث: $v(0)=5$

t   v

لإيجاد الثابت c

ثالثاً: نعوض

$5 = 2(0)^2 - 4(0) + c$

$5 = c$

رابعاً نكتب السرعة

$v(t) = 2t^2 - 4t + 5$

خامساً: نجد المسافة

$S(t) = \int V(t)\,.dt$

$S(t) = \int 2t^2 - 4t + 5\,.dt$

$$S(t) = \frac{2t^3}{3}-\frac{4t^2}{2}+5t+c$$

$$S(t) = \frac{2t^3}{3}-2t^2+5t+c$$

من المعطيات: $S(0)=0$

t   S

$$0=\frac{2(0)^3}{3}-2(0)^2+5(0)+c$$

$c = 0$

إذن $\frac{2t^3}{3}-2t^2+5t$

سابعاً: نجد الموقع بعد 3 ثوان

$$S(3)=\frac{2(3)^3}{3}-2(3)^2+5(3)$$

$$=\frac{2(\cancel{27}^{\,9})}{\cancel{3}}-2(9)+15$$

$= 18 - 18 + 15$

$= 15$ m

تمارين ومسائل صفحة 20:

أجد قاعدة الاقتران f(x) في كل مما يأتي،

علماً بأن منحناه يمر بالنقطة المعطاة:

(1) $f'(x) = x - 3$ (2,9)

$f(x) = \int f'(x)\,.dx$

$f(x) = \int x - 3.dx$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+c$$

(2 , 9)

x   f

$$9=\frac{(2)^2}{2}-3(2)+c$$

$9 = 2 - 6 + c$

$9 = -4 + c$

$+4 \quad +4$

$c = 13$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+13$$

(2) $f'(x) = x^2 - 4$ (0,7)

$f(x) = \int f'(x)\,.dx$

$f(x) = \int x^2 - 4.dx$

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-4x+c$$

(0 , 7)

x   f

$$7 = \frac{(0)^3}{3} - 4(0) + c$$

$$7 = c$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + 7$$

(3) $f'(x) = 6x^2 - 4x + 2$ (1,9)

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$f(x) = \int 6x^2 - 4x + 2\,dx$$

$$f(x) = 2x^2 - 2x^2 + 2x + c$$

(1 , 9)

x f

$$9 = 2(1)^3 - 2(1)^2 + 2(1)^2 + c$$

$$9 = 2 - 2 + 2 + c$$

$$9 = 2 + c$$

$$-2 \quad -2$$

$$7 = c$$

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x + 7$$

(4) $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2$ (4,11)

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$f(x) = \int x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^2\,dx$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{3} + c$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{12}x^3 + c$$

(4 , 11)

x f

$$11 = \frac{2}{3}\sqrt{(4)^3} + \frac{64}{12}(4)^3 + c$$

$$11 = \frac{2}{3}\sqrt{64} + \frac{1}{12}(64) + c$$

$$11 = \frac{2}{3}(8) + \frac{64}{12} + c$$

4 ÷

$$11 = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} + c$$

$$11 = \frac{32}{3} + c$$

$$-\frac{32}{3} \quad -\frac{32}{3}$$

$$c = \frac{3.11}{3.1} - \frac{32}{3}$$

$$c = \frac{33}{3} - \frac{32}{3}$$

$$c = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{12} + \frac{1}{3}$$

(5) $f'(x) = (x + 2)^2$ (1,7)

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$f(x) = \int (x+2)^2\,dx$$

$$f(x) = \int (x+2)(x+2)\,dx$$

$$f(x) = \int x^2 + 4x + 4\,dx$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + c$$

(1 , 7)

x f

$$0=6\sqrt{4}-\frac{(4)^2}{2}+c$$
$$0=6(2)-8+c$$
$$0=12-8+c$$
$$0=4+c$$
$$-4 \quad -4$$
c= - 4
$$f(x)=6\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}-4$$

(7) $\frac{dy}{dx}=0.4x+3$

$dy=(0.4x+3).dx$ بالضرب التبادلي

الآن نكامل الطرفين

$$\int dy=\int 0.4x+3.dx$$
$$y=\frac{0.4x^2}{2}+3x+c$$
$$y=0.2x^2+3x+c$$

يمر بالنقطة

(0 , 5)

x y

$5 = 0.2(0)^2 + 3(0) + c$

$5 = c$

$y = 0.2x^2 + 3x + 5$

(8) $f(x)=\int f'(x)\ .dx$

$$f(x)=\int \frac{x^2+10}{x^2}\ .dx$$

$$7=\frac{(1)^3}{3}+2(1)^2+4(1)+c$$
$$7=\frac{1}{3}+2+4+c$$
$$7=\frac{1}{3}+\frac{6}{1}+c$$
$$7=\frac{1}{3}+\frac{18}{3}+c$$
$$7=\frac{19}{3}+c$$
$$-\frac{19}{3} \quad -\frac{19}{3}$$
$$c=\frac{3.7}{3.1}-\frac{19}{3}$$
$$c=\frac{21}{3}-\frac{19}{3}$$
$$c=\frac{2}{3}$$
$$f(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+4x+\frac{2}{3}$$

(6) $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-x$ (4,0)

$$f(x)=\int f'(x)\ .dx$$
$$f(x)=\int \frac{3}{\sqrt{x}}-x\ .dx$$
$$f(x)=\int \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}-x\ .dx$$
$$f(x)=\int 3x^{-\frac{1}{2}}-x\ .dx$$
$$f(x)=(2)3x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^2}{2}+c$$
$$f(x)=6\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}+c$$

(4 , 0)

x f

(10)

$$y(t) = \int 4t^{\frac{-2}{3}}.dt$$

$$y = (3)4t^{\frac{1}{3}} + c$$

$$y = 12\sqrt[3]{t} + c$$

y(8) = 30

t y

$30 = 12\sqrt[3]{8} + c$

30 = 12(2) + c

30 = 24 + c

-24 -24

6 = c

$y(t) = 12\sqrt[3]{t} + 6$

(11) $y(27) = 12\sqrt[3]{27} + 6$

= 12(3) + 6

= 36 + 6

= 42 cm

(12) $h'(t) = 0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}$

h(0) = 2f t

$$h(t) = \int h'(t).dt$$

$$h(t) = \int 0.2t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{1}{2}}$$

$$h(t) = 0.2\left(\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\right) + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c$$

$$h(t) = \frac{0.6}{5}\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c$$

h(0) = 2

t h

$$f(x) = \int \frac{x^2}{x^2} + \frac{10}{x^2}.dx$$

$$f(x) = \int 1 + 10x^{-2}.dx$$

$$f(x) = x + \frac{10x^{-1}}{-1} + c$$

$$f(x) = x - \frac{10}{x} + c$$

يمر بالنقطة

(5 , 2)

x f

$2 = 5 - \frac{10}{5} + c$

2 = 5 – 2 + c

2 = 3 + c

-3 -3

c = -1

$$f(x) = x - \frac{10}{x} - 1$$

(9) $f(x) = \int f'(x)\ .dx$

$f(x) = f(x) = \int 3x^2 - 3\ .dx$

$f(x) = x^3 - 3x + c$

نختار نقطة على منحنى f من الرسم مثل

النقطة (-1 , 4)

x f

$4 = (-1)^3 - 3(-1) + c$

4 = -1 +3 + c

4 = 2 + c

-2 -2

2 = c

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

$$V(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}$$

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}$$

$$S(t) = \int v(t).dt$$

$$S(t) = \int \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}.dt$$

$$S(t) = \frac{1}{3}\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3}t + c$$

S(0) = 3

t S

$$3 = \frac{1}{3}\frac{(0)^4}{4} + \frac{2}{3}(0) + c$$

$$3 = c$$

$$S(t) = \frac{1}{12}(2)^4 + \frac{2}{3}(2) + 3$$

$$= \frac{4 \div 16}{4 \div 12} + \frac{4}{3} + \frac{3.3}{1.3}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{3} = \frac{17}{3}m$$

(15) $V(t) = \int a(t).dt$

$V(t) = \int 9\text{-}2t\ .dt$

$V(t) = 9t - t^2 + c$

تحرك من نقطة الأصل

V(0) = 2

t V

$2 = 9(0) – (0)^2 + c$

2 = 0

$$2 = \frac{0.6}{5}\sqrt[3]{(0)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(0)^3} + c$$

$$2 = c$$

$$h(t) = \frac{6}{5}\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + 2$$

(13) $S(t) = \int v(t)\ .dt$

$$S(t) = \int 2t + 3.dt$$

$$S(t) = t^2 + 3t + c$$

S(0) = 0

t S

0 = 0 3(0) + c

c = 0

$S(t) = t^2 + 3t$

$S(3) = (3)^2 + 3(3)$

= 9 + 9

= 18 m

(14) $V(t) = \int a(t).dt$

$V(t) = \int t^2.dt$

$V(t) = \frac{t^3}{3} + c$

V(1) = 1

t V

$$1 = \frac{1}{3} + c$$

$$-\frac{1}{3}\ \text{-}\ \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{1}{3} = c$$

$$\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = c \rightarrow c = \frac{2}{3}$$

$$V(t) = 9t - t^2 + 2$$

$$S(t) = \int V(t)\,.dt$$

$$S(t) = \int 9t - t^2 + 2\,.dt$$

$$S(t) = \frac{9t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + 2t + c$$

الحركة من نقطة الأصل

(0 , 0)

t S

$$0 = \frac{9(0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{3} + 2(0) + c$$

$$S(t) = \frac{9t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + 2t$$

$$S(t) = 18 - \frac{8}{3} + 4$$

$= 22 - \frac{8}{3}$ توحيد مقامات

$$= \frac{66}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{58}{3}\,m$$

مهارات التفكير العليا:

(16) m = f ' (-2) = 7

f ' (x) = ax + b

7 = -2a + b → (1)

$$f(x) = \int f'(x)\,.dx$$

$$f(x) = \int ax + b\ \ .dx$$

$$f(x) = \frac{ax^2}{2} + bx + c$$

ويمر بالنقطة (0 , 18)

x f

$$18 = \frac{a(0)^2}{2} + b(0) + c$$

$$c = 18$$

ويمر بالنقطة (-2 , 8)

x f

$$8 = \frac{a(-2)^2}{2} + b(-2) + 18$$

$$8 = 2a - 2b + 18$$

$$-18 \qquad -18$$

-10 = 2a - 2b → (2)

نستخدم الحذف بين المعادلات

$$-2a + 3 = 7$$

$$+$$

$$\underline{2a - 2b = -10}$$

$$\frac{-b}{-1} = \frac{-3}{-1}$$

$$b = 3$$

نعوض قيمة b في إحدى المعادلات

السابقة سواء (1) أو (2)

-2a + 3 = 7

-3 -3

$$\frac{-2a}{-2} = \frac{4}{-2}$$

a = -2

$$f(x) = \frac{ax^2}{2} + bx + c$$

$$f(x) = \frac{-2x^2}{2} + 3x + 18$$

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 18$$

(17) $f'(x) = m = 4 - \frac{100}{x^2}$

$$f(x) = \int f'(x).dx$$

بما ان النقطة (a , 10) نقطة حرجة

∴ $f'(a) = 0$

x ← ... → f

$0 = 4 - \frac{100}{a^2}$

$-4 \quad -4$

$-4 \times \frac{100}{a^2}$

$\frac{-4a^2}{-4} = \frac{-100}{-4}$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{25}$

$a = 5 \qquad a = -5$

تهمل

لأن $a > 0$ ← تصبح النقطة $(5 , 10)$

$f(x) = \int 4 - 100x^{-2}\,dx$

$f(x) = 4x - \frac{100x^{-1}}{-1} + c$

$f(x) = 4x + \frac{100}{x} + c$

$(5 , 10)$

x ← ... → f

$10 = 4(5) + \frac{100}{5} + c$

$10 = 20 + 20 + c$

$10 = 40 + c$

$-40 \quad -40$

$c = -30$

$f(x) = 4x + \frac{100}{x} - 30$

الدرس الثالث

التكامل المحدود

يرمز للتكامل المحدود بالرمز

$$\int_a^b f'(x)\,.dx$$

حيث a: الحد السفلي

b: الحد العلوي.

وللتكامل المحدود قاعدة هي

$$\int_a^b f'(x) = .dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

f(b)← تعويض العلوي بعد التكامل

f(a)← تعويض السفلي بعد التكامل

تنبيه

لا نضع ثابت التكامل (c) في المحدود

ومن الأمثلة على ذلك كثير منها :

سؤال: أجد كل تكامل فيما يلي:

(1) $\int_2^3 2x\,.dx$

أولاً: نكامل الاقتران دون اضافة (c)

$$\int_2^3 2x\,.dx = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\Big|_2^3$$

$$= x^2\Big|_2^3$$

ثانياً: نستخدم قوسين بينهما ناقص ثم نعوض الحد العلوي في الاقتران ثم السفلي

= (علوي) – (السفلي)

= $(3^2) - (2^2)$

$$= 9 - 4$$

$$= 5$$

(2) $\int_{-1}^{3} 2x+3 \, .dx$

الحل: أولاً: نجري عملية التكامل دون اضافة c

$$= x^2 + 3x \Big|_{-1}^{3}$$

ثانياً: نستخدم الأقواس:

= (العلوي) – (السفلي)

$$((3^2) + 3(3)) - ((1-)^2 + 3(-1))$$

$$= (9+9)\ (1-3)$$

$$= 18 - -2$$

$$= 20$$

(3) $\int_{-2}^{2} 3x^2-4x+5 \, .dx$

الحل:

$$= \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x \Big|_{-2}^{2}$$

$$= x^3 - 2x^2 + 5x \Big|_{-2}^{2}$$

$$=((2)^3 - 2(2)^2 + 5(2)) - ((-2)^3 - 2(-2)^2 + 5(-2))$$

$$= (8-2(4) + 10)\ -(-8-2(4) - 10)$$

$$= 10 - - 26 = 36$$

(4) $\int_{0}^{3} x\,(2x - 3).dx$

الحل: نضرب ثم نكامل

$$= \int_{0}^{3} 2x^2 - 3x \, .dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \Big|_{0}^{3}$$

$$= \left(\frac{2(3)^3}{3} - \frac{3(3)^2}{2} \right) - \left(\frac{2(0)^3}{3} - \frac{3(0)^2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{2(\cancel{27}^{9})}{\cancel{3}} - \frac{3(9)}{2} \right) - (0-0)$$

$$= 18 - \frac{27}{2}$$

$$= \frac{36}{2} - \frac{27}{2}$$

$$= \frac{9}{2}$$

(5) $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} .dx$

الحل:

$$= \int_{1}^{4} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} .dx$$

$$= \int_{1}^{4} x^{-\frac{1}{2}} .dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_{1}^{4} = 2\sqrt{x} \Big|_{1}^{4}$$

$$= (2\sqrt{4}) - (2\sqrt{1})$$

$$= (2*2) - (2*1)$$

$$= 4 - 2 = 2$$

سؤال2:

إذا كان $\int_{1}^{5} k \ .dx = 20$ حيث k ثابت

فجد قيمة k ؟؟

الحل: أولاً نكامل الثابت k

$$k\,x \Big|_{1}^{5} = 20$$

ثم نعوض:

$$(k(5)) - (k(1)) = 20$$

$$5k - k = 20$$

$$\frac{4k}{4} = \frac{20}{4}$$

$$k = 5$$

سؤال3:

إذا كان $\int_{-3}^{k} 2x \ .dx = 0$ حيث k ثابت

فجد قيمة k ؟؟

الحل:

$$x^2 \Big|_{-3}^{k} = 0$$

ثم نعوض:

$$(k^2) - ((-3)^2) = 0$$

$$k^2 - 9 = 0$$

$$+9 \quad +9$$

$$\sqrt{k^2} = \sqrt{9}$$

$$k \pm 3$$

سؤال4:

إذا كان $f(3) = 5$

$f(2) = -4$

فجد $\int_{2}^{3} f'(x)\ .dx = ??$

الحل: نكامل ثم نعوض $= f(x)\Big|_{2}^{3}$

$$= (f(3)) - (f(2))$$

$$= 5 - -4$$

$$= 5 + 4$$

$$= 9$$

سؤال5:

إذا كان $f(5) = 7$

$f(-1) = 3$

وكان $\int_{5}^{-1} kf'(x)\ .dx = 40$

فجد قيمة الثابت k

الحل: نكامل الاقتران

$$\int_{5}^{-1} kf'(x).dx = 40$$

$$kf(x)\Big|_{5}^{-1} = 40$$

$$(kf(-1)) - (kf(5)) = 40$$

$$3k - 7k = 40$$

$$\frac{-4k}{-4} = \frac{40}{-4}$$

$$k = -10$$

سؤال6:

إذا كان $\int_{1}^{k} 2x + 3.dx = 6$

فجد قيمة الثابت k ؟؟

الحل: نكامل الاقتران

$$x^2 + 3x \Big|_{1}^{k} = 6$$

$$(k^2 + 3k) - ((1)^2 + 3(1)) = 6$$

$$(k^2 + 3k) - (1 + 3) = 6$$

$$k^2 + 3k - 4 = 6$$

معادلة تربيعية قابلة للتحليل ولكن بشرط

الطرف الثاني لها يساوي صفراً

$$k^2 + 3k - 4 = 6$$
$$\quad - 6 \qquad -6$$
$$k^2 + 3k - 10 = 0$$
$$(k + 5)(k - 2) = 0$$
$$k = -5 \qquad k = 2$$

خصائص التكامل المحدود:

خاصية (1) :

$$\int_a^b k\,.dx = k\,(b - a)$$

حيث:

ثوابت a , b , k

سؤال: جد كل تكامل فيما يلي:

$$(1)\ \int_1^5 3.dx$$

الحل: ما داخل التكامل هو عدد ثابت إذن

تطبيق الخاصية فوراً

$$\int_1^5 3.dx = 3(5-1)$$
$$= 3(4)$$
$$= 12$$

$$(2)\ \int_{-2}^{-3} 4.dx$$
$$= 4(-3 - -2)$$
$$= 4(-3+2)$$
$$= 4(-1)$$
$$= -4$$

$$(3)\ \int_5^0 -2\pi.dx$$

$$= -2\pi(0-5)$$
$$= 2\pi(-5)$$
$$= -2\pi(-5)$$
$$= 10\pi$$

خاصية (2) :

$$\int_a^b k\, f(x)\,.dx = k\int_a^b f(x).\,dx$$

حيث k عدد ثابت

سؤال1: إذا كان

$$\int_2^3 f(x).dx = 5$$

فجد $\int_2^3 5f(x).dx = ??$

الحل: حسب الخاصية $= \int_2^3 5f(x).dx$

نستخرج 5 خارج التكامل

نضرب بناتج $= 5\int_2^3 f(x).dx$

التكامل المعطى بالسؤال

$= 5(5) = 25$

سؤال2 : إذا كان

$$\int_1^4 f(x).dx = 7$$

فجد $\int_1^4 3f(x).dx = ??$

الحل:

$$\int_1^4 3f(x).dx =$$

$$= 3\int_1^4 f(x).dx$$

$$3(7) = 21$$

سؤال3 : إذا كان

$$\int_2^4 f(x).dx = -2$$

فجد $\int_2^4 4f(x).dx = ??$

الحل:

$$\int_2^4 4f(x).dx =$$

$$= 4\int_2^4 f(x).dx$$

$$4(-2) = -8$$

سؤال4 : إذا كان

$$\int_0^3 2f(x).dx = 12$$

فجد $\int_0^3 5f(x).dx = ??$

الحل: أولاً نتعامل مع المعطيات لإيجاد

$$\int_0^3 f(x).dx$$

بالقسمة على 2 للطرفين $\frac{2}{2}\int_0^3 f(x).dx = \frac{12}{2}$

$$\int_0^3 f(x).dx = 6$$

ثانياً: بعد ايجاد قيمة $\int_0^3 f(x)$ نتعامل مع

المطلوب

$$\int_0^3 5f(x).dx =$$

$$5\int_0^3 f(x).dx =$$

$$5(6) = 30$$

سؤال5 : إذا كان

$$\int_2^7 5f(x).dx = 20$$

فجد $\int_2^7 3f(x).dx = ??$

الحل:

$$\frac{5}{5}\int_2^7 f(x).dx = \frac{20}{5}$$

$$\int_2^7 f(x).dx = 4$$

$$3\int_{2}^{7} f(x).dx =$$

$$3(4) = 12$$

سؤال6 : إذا كان

$$\int_{-3}^{5} 2f(x).dx = 10$$

فجد $\int_{2}^{7} 3f(x).dx = ??$

الحل:

$$\frac{2}{2}\int_{-3}^{5} f(x).dx = \frac{10}{2}$$

$$\int_{-3}^{5} f(x).dx = 5$$

$$7\int_{-3}^{5} f(x).dx =$$

$$7(5) = 35$$

سؤال7 : إذا كان

$$\int_{a}^{b} \frac{3}{5} f(x).dx = 3$$

فجد $\int_{a}^{b} -2f(x).dx = ??$

الحل:

$$\frac{3}{5}\int_{a}^{b} f(x).dx = 3$$

نضرب بمقلوب الكسر

$$\int_{a}^{b} f(x).dx = 3 * \frac{5}{3}$$

$$\int_{a}^{b} f(x).dx = 5$$

$$-2\int_{a}^{b} f(x).dx =$$

$$-2(5) = -10$$

خاصية (3) : التوزيع

$$\int_{a}^{b} f(x) \pm g(x) \,.\, dx =$$

$$\int_{a}^{b} f(x) \,.\, dx \pm \int_{a}^{b} g(x) \,.\, dx$$

يوزع التكامل على الجمع والطرح فقط

سؤال 1 : إذا كان

$$\int_{1}^{2} f(x).dx = 5$$

وكان

$$\int_{1}^{2} g(x).dx = 3$$

فجد

$$\int_{1}^{2} 2f(x) + 3g(x).dx$$

نوزع التكامل:

$$\int_{1}^{2} 2f(x).dx + \int_{1}^{2} 3g(x).dx$$

$$2\int_{1}^{2} f(x).dx + 3\int_{1}^{2} g(x).dx$$

نعوض نتائج التكاملات

2(5) + 3(3) =

10 + 9 = 19

سؤال 2 : إذا كان

$$\int_{0}^{2} f(x).dx = -3$$

$$\int_{0}^{2} g(x).dx = -5$$

فجد

$$\int_{0}^{2} 4f(x) + 3g(x) + 2x.dx$$

$$= \int_{0}^{2} 4f(x).dx - \int_{0}^{2} 3g(x).dx + \int_{0}^{2} 2x.dx$$

$$= 4\int_{0}^{2} f(x).dx - 3\int_{0}^{2} g(x).dx + \int_{0}^{2} 2x.dx$$

$$= 4(-3) - 3(-5) + x^{2}\Big|_{0}^{2} =$$

$$= -12 + 15 + \left((2)^{2} - (0)^{2}\right)$$

$$= 3 + 4 - 0 = 7 - 0 = 7$$

سؤال 3 : إذا كان

$$\int_{-1}^{2} 3f(x).dx = 15$$

$$\int_{-1}^{2} 4g(x).dx = 20$$

فجد

$$\int_{-1}^{2} 2f(x) + g(x).dx$$

الحل: أولاً: نجد قيم التكاملات للاقترانين
f(x) , g(x)

بالقسمة على 3 $\frac{3}{3}\int_{-1}^{2} f(x).dx = \frac{15}{3}$

$$\int_{-1}^{2} f(x).dx = 5$$

بالقسمة على 4 $\frac{4}{4}\int_{-1}^{2} g(x).dx = \frac{20}{4}$

$$\int_{-1}^{2} g(x).dx = 5$$

ثانياً: نوزع الشكل المطلوب ←

$$= \int_{-1}^{2} 2f(x) + \int_{-1}^{2} g(x).dx$$

$$= 2\int_{-1}^{2} f(x) + \int_{-1}^{2} g(x).dx$$

$$= 2(5) + 5 = 10 + 5 = 15$$

سؤال 4 :

إذا كان $\int_{-2}^{2} \frac{3f(x)}{5}.dx = 3$

فجد $\int_{-2}^{2} 4f(x).dx$

الحل: نجد قيمة f(x)

نضرب بمقلوب الكسر $\frac{3}{5}\int_{-2}^{2} f(x).dx = 3$

$$\frac{5}{3}.\frac{3}{5}\int_{-2}^{2} f(x).dx = \frac{5}{3}.3$$

$$\int_{-2}^{2} f(x).dx = 5$$

بعد إيجاد f(x) نتعامل مع المطلوب:

$$\int_{-2}^{2} 4f(x).dx$$

$$4\int_{-2}^{2} f(x).dx =$$

$$4(5) = 20$$